Expresiones Algebraicas Enteras

Una expresión algebraica entera es una combinación cualquiera y finita, de números y letras, ligados entre sí con las operaciones de suma, resta, multiplicación y potenciación (con exponente natural). A los números se los denomina coeficientes y a las letras, variables o indeterminadas. Las indeterminadas **NO** deben estar afectadas por una raíz o actuando como divisor.

Ejemplo: $-\frac{2}{5}x^2 + x^4$

- Monomios: Son las expresiones algebraicas enteras en las que no intervienen ni la suma ni la resta.

Ejemplo: $-\frac{2}{5}x^2$

Signo

Coeficiente

Parte literal

- Monomios semejantes: Dos o más monomios son semejantes si tienen la misma parte literal (deben coincidir la letra y el exponente); es decir que pueden diferir en el signo y en el coeficiente.

Ejemplo: $-\frac{2}{5}x^2 \quad y \quad 4x^2 \ \ son\ semejantes$

$-\frac{2}{5}x^2 \quad y \quad 4x^3 \ \ no\ \ son\ semejantes$

- Polinomios: Son las *expresiones algebraicas* enteras en las que intervienen la suma, la resta o ambas simultáneamente. También puede definirse un polinomio como la suma algebraica de monomios.

Se llama polinomio a una expresión del tipo:

Ejemplo: $P(x) = \underbrace{-3}_{\text{Coeficiente principal}}x^6 - x^5 - 12x^4 - 9x^2 + 9x + \underbrace{108}_{\text{Término independiente}}$

- Nombre del polinomio: según la cantidad de términos con coeficientes distintos de cero, el polinomio recibe un nombre en particular.

Monomio: un solo término Ejemplo: P(x) =$-3x^5$

Binomio: dos términos Ejemplo: R(x) = $2x^2 - x^4$

Trinomio: tres términos Ejemplo: $Q(x) = \frac{1}{2} x^3 + 3x - x$

Cuatrinomio: cuatro términos Ejemplo: $T(x) = \frac{3}{5}x^6 - 2x^3 + x^2 - 5$

Cinco términos en adelante, en general, se lo denomina polinomio.

- Grado de un polinomio

El grado de un polinomio está dado por el mayor exponente de la variable, cuyo coeficiente sea distinto de cero. Se utiliza la siguiente nomenclatura para denotarlo: gr [P(x)]=n

Ejemplos: gr[P(x)]=5 ; gr[R(x)]=4 ; gr[Q(x)]=3 ; gr[T(x)]=6

- Polinomio completo: Un polinomio está completo cuando posee todos los términos desde el de mayor grado hasta el término independiente. En caso contrario se dice incompleto. Para completar un polinomio se agregan los términos faltantes con coeficiente cero.

$P(x) = -3x^6 - x^5 - 12x^4 + 2x^3 - 9x^2 + 9x + 108$ Completo

$Q(x) = x^4 - 8x^2 - 9$ Incompleto

$Q(x) = x^4 + 0x^3 - 8x^2 + 0x - 9$ Completo

- Polinomio ordenado: un polinomio está ordenado cuando sus términos están ordenados, según los exponentes de la variable, en forma creciente o decreciente. Usaremos el orden decreciente, o sea, de mayor a menor.

$P(x) = -3x^6 - x^5 - 12x^4 + 2x^3 - 9x^2 + 9x + 108$ Completo y ordenado

$Q(x) = x^4 - 8x^2 - 9$ Incompleto y ordenado

- Polinomio nulo: se denomina así, cuando todos los coeficientes son cero. El polinomio nulo carece de grado.

Se simboliza $P(x) = 0$

- Valor numérico: se llama valor numérico de un polinomio al resultado obtenido luego de sustituir la variable por un número real, y realizar las operaciones como cálculo combinado. También se denomina especializar un polinomio

Dado el polinomio $P(x) = 2x^2 - 3x - 5$, hallar el valor numérico para $x = 2$, entonces sustituimos la letra por dicho valor

$P(2) = 2.2^2 - 3.2 - 5$

$P(2) = 8 - 6 - 5$

$P(2) = -3$ por lo tanto el valor numérico del P (x) es -3, cuando la variable toma valor 2.

¡Importante!: Cuando el valor numérico de un polinomio es cero, decimos que el valor de "x" que sustituimos es la ***RAÍZ*** del polinomio.

Por ejemplo, en el caso anterior, si la x = -1, obtenemos:

$P(x) = 2x^2 - 3x - 5$

$P(-1) = 2.(-1)^2 - 3.(-1) - 5$

$P(-1) = 2 + 3 - 5$

$P(-1) = 0 \Rightarrow x = -1$ es raíz de $P(x)$

OPERACIONES CON POLINOMIOS

- Suma de polinomios

Definición: Se llama suma de dos polinomios P y Q al polinomio cuyos términos se obtienen sumando los términos del mismo grado de P y Q.

Regla práctica: para sumar varios polinomios entre sí, se coloca uno debajo del otro, de manera que los términos semejantes queden encolumnados; se realizan las sumas parciales de cada columna y así se obtiene el polinomio resultado. Por ejemplo:

Dados los polinomios $P(x) = -x^5 - 12x^4 + 2x^3 - 9x^2 + 9x + 108$

$Q(x) = x^4 - 8x^2 - 5x - 9$

Para calcular $P(x) + Q(x)$ procedemos así:

$$\begin{array}{rrrrrrr} & -x^5 & -12x^4 & +2x^3 & -9x^2 & +9x & +108 \\ + & & x^4 & & -8x^2 & -5x & -9 \\ \hline P(x)+Q(x) = & -x^5 & -11x^4 & +2x^3 & -17x^2 & +4x & +99 \end{array}$$

- Resta de polinomios

Definición: La diferencia entre un polinomio P y otro Q, es un polinomio que se obtiene sumando a P el opuesto de Q.

Regla práctica: para restar dos polinomios, al minuendo se le suma el opuesto del sustraendo.

Dados los polinomios $P(x) = -6x^6 - 8x^4 - 5x^2 + 2x + 4$ y

$Q(x) = 8x^6 + 3x^5 - x^4 - x^2 - 3x - 9$

Si anotamos el desarrollo en forma horizontal, puede notarse que el signo de la resta afecta a todo el polinomio sustraendo, de modo que cambian todos ellos, quedando el polinomio opuesto, o sea $-Q(x)$

$$P(x) - Q(x) = -6x^6 - 8x^4 - 5x^2 + 2x + 4 - (8x^6 + 3x^5 - x^4 - x^2 - 3x - 9) =$$

Para calcular $P(x) - Q(x)$ procedemos así:

$$\begin{array}{rr} & -6x^6 \qquad\quad - 8x^4 - 5x^2 + 2x + 4 \\ + & - 8x^6 - 3x^5 + x^4 + \quad x^2 + 3x + 9 \\ \hline P(x) + (-Q(x)) = & -14x^6 - 3x^5 - 7x^4 - 4x^2 + 5x + 13 \end{array}$$

- <u>Multiplicación de polinomios</u>

Para multiplicar dos polinomios se aplica la propiedad distributiva; multiplicando los coeficientes, sumando los exponentes de la variable y aplicando la regla de signos. Luego se suman los términos de igual grado.
Regla práctica: procedemos a disponer los polinomios como en la multiplicación entre números.
Ejemplo:

Dados los polinomios $P(x) = 2x^3 - 9x^2 + 4x + 3$ y $Q(x) = 8x^2 - 5x$

calcular $P(x).Q(x)$

$$\begin{array}{r} 2x^3 - 9x^2 + 4x + 3 \\ 8x^2 - 5x \\ \hline -10x^4 + 45x^3 - 20x^2 - 15x \\ 16x^5 - 72x^4 + 32x^3 + 24x^2 \qquad\quad \\ \hline 16x^5 - 82x^4 + 77x^3 + 4x^2 - 15x \end{array} = P(x).Q(x)$$

- <u>División de polinomios</u>

Dividir un polinomio $D(x)$ llamado dividendo, por otro $d(x)$, llamado divisor, es encontrar dos expresiones algebraicas $C(x)$ y $R(x)$, llamada cociente y resto respectivamente; tales que el dividendo es igual al producto del divisor por el cociente, más el resto. Y el grado del resto menor que el grado del divisor.

$$D(x) = d(x).C(x) + R(x)$$

<u>Regla de Ruffini:</u> es un método abreviado para realizar divisiones en los que el divisor es de la forma (x+a) con a $\in \mathbb{R}$

Veamos un ejemplo: **$(4X^4 + 2X^2 - 5X + 8) \div (X + 2)$**

Primero tenemos que escribir el dividendo completo y ordenado $4X^4 + 0X^3 + 2X^2 - 5X + 8$
(Fíjense que como faltaba el término de X^3 lo completé poniendo $0X^3$)

Después armo la siguiente tabla:

	4	0	2	-5	8
-2					

Son los coeficientes del dividendo

Es el número del divisor **cambiado de signo**

Y la división se resuelve así:

	4	0	2	-5	8
-2					
	4				

Bajo el primer coeficiente

	4	0	2	-5	8
-2		-8			
	4				

Multiplico $-2 . 4 = -8$

	4	0	2	-5	8
-2		-8			
	4	-8			

Sumo $0 + (-8) = -8$

	4	0	2	-5	8
-2		-8	+ 16		
	4	-8			

Vuelvo a multiplicar

Y de esta manera repito los pasos anteriores hasta terminar:

	4	0	2	-5	8
-2		-8	+ 16	-36	+ 82
	4	-8	+ 18	-41	90

Ahora nos queda ver cuál es el resultado de la división y cual es el resto:

	4	0	2	-5	8
-2		-8	+ 16	-36	+ 82
	4	-8	+ 18	-41	90

Es el resto de la división

Son los coeficientes del resultado

- Entonces: $(4X^4 + 2X^2 - 5X + 8) \div (X + 2) = 4X^3 - 8X^2 + 18X - 41$ (Y de resto 90)

El resto de la división de un polinomio entero en x por otro de la forma (x + a) es el valor numérico del polinomio dividendo para x = - a

El teorema del Resto sirve para calcular el resto de una división sin tener que hacer la misma. Por lo tanto es muy útil para establecer si dos polinomios son divisibles. En el caso tratado anteriormente procedemos así:

$P(x) = 4x^4 + 2x^2 - 5x + 8$

$P(-2) = 4(-2)^4 + 2(-2)^2 - 5(-2) + 8$

$P(-2) = 4.16 + 2.4 + 10 + 8 = 90$

Productos Notables

- ***Cuadrado de binomio:*** $(\boldsymbol{a} \pm \boldsymbol{b})^2 = \boldsymbol{a}^2 \pm \mathbf{2}.\boldsymbol{a}.\boldsymbol{b} + \boldsymbol{b}^2$

$$\left(-2x^2 + \frac{3}{4}x\right)^2 = (-2x^2)^2 + 2.(-2x^2).\frac{3}{4}x + \left(\frac{3}{4}x\right)^2 =$$

$$= 4x^4 - 3x^3 + \frac{9}{16}x^2$$

- ***Diferencia de cuadrados:*** $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}).(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}^2 - \boldsymbol{b}^2$

$$\left(\frac{2}{5}x^3 + 5\right)\left(\frac{2}{5}x^3 - 5\right) = \left(\frac{2}{5}x^3\right)^2 - 5^2 = \frac{4}{25}x^6 - 25$$

- ***Cubo de binomio:*** $(a + b)^3 = \boldsymbol{a}^3 + \mathbf{3}.\boldsymbol{a}^2.\boldsymbol{b} + \mathbf{3}.\boldsymbol{a}.\boldsymbol{b}^2 + \boldsymbol{b}^3$

$$\left(-\frac{5}{2}x^4 + x^5\right)^3 = \left(-\frac{5}{2}x^4\right)^3 + 3.\left(-\frac{5}{2}x^4\right)^2.x^5 + 3.\left(-\frac{5}{2}x^4\right).(x^5)^2 + (x^5)^3 =$$

$$= -\frac{125}{8}x^{12} + 3.\frac{25}{4}x^8.x^5 - \frac{15}{2}x^4.x^{10} + x^{15} =$$

$$= -\frac{125}{8}x^{12} + \frac{75}{4}x^{13} - \frac{15}{2}x^{14} + x^{15}$$

FACTOR COMÚN

FACTOREAR un polinomio es expresarlo como un producto de factores primos. **FACTOR COMÚN**

Es un procedimiento que consiste en considerar el o los factores que se repiten en todos los términos.

Entre los coeficientes se extrae el **DCM**, y entre la parte literal se extrae la letra de **MENOR GRADO.**

Se trata de aplicar la propiedad recíproca de la distributiva de la multiplicación con respecto a la adición y sustracción.

Ejemplos:

$a)\ A(x) = 2x^6 + 3x^5 + x^4$ $A(x) = x^4.(2x^2 + 3x + 1)$	Observamos que entre los coeficientes, el DCM es 1 Por lo tanto, no es necesario escribirlo. Entre las variables, se extrae la de menor exponente y la escribimos fuera multiplicando al paréntesis, donde anotaremos el resultado que queda luego de extraer dicha variable. Podemos verificar, aplicando propiedad distributiva, que volvemos a la expresión original. El polinomio ya está factorizado, o sea expresado como producto.
$b)\ B(x) = -12x^3 + 28x - 4$ $B(x) = 4.(\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots)$ o $B(x) = -4.(\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.)$	En este caso, al buscar los factores en común, puede observarse que el DCM = 4, en cambio la variable no es común a todos los términos, en consecuencia, sólo extraemos el factor numérico. Incluso, el factor numérico puede extraerse con ambos signos (positivo o negativo). Lo haremos de las dos formas. No olvidar aplicar regla de signos de la multiplicación.

c) $C(x) = 12x^2 - 9x^5 + 6x^8$ $C(x) = 3x^2.(\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots)$	En este caso, observamos que entre los coeficientes, el DCM =3 y entre las variables, la de menor exponente está al cuadrado, entonces podemos extraer ambos factores. Es una combinación de los dos casos anteriores.

Trabajo Práctico N° 1: Polinomios

I. Algunas de las expresiones algebraicas escritas a continuación, no representan polinomios. Indiquen cuáles son e indicar por qué:

$$-4x^7 - 8x^3 + 4x^2 + 16x \quad ; \quad \frac{1}{3}x^2 + 4 - 5x \quad ; \quad x^{-2} - 4x^3 + \frac{1}{5}x^2$$

$$2x^4 - x^3 + 16\sqrt{x} \quad ; \quad \sqrt{3}x + 2 \quad ; \quad x^5 - 4x^{1/3} + 4 - 5x \quad ; \quad -x^2 + 14\frac{1}{x}$$

II. Completen el siguiente cuadro:

Polinomio	**Grado**	**Coeficiente principal**	**Término independiente**	**Polinomio ordenado**	**Polinomio completo**
$A(x) = 2x^3 - 5x^2 + 3x$					
$B(x) = 2x^4 - \frac{1}{2}x^5 + 2$					
$C(x) = -2x^6 + 3x^2 + x^7$					
$D(x) = x^3 - x^2 + x - 2$					
$E(x) = -x^4 - 2x^2 - \frac{1}{7}$					
$F(x) = \sqrt{2}x^2 - 4x$					
$G(x) = 2x^2 - 5 + 2x$					
$H(x) = -\frac{1}{3}x^4 - 5x^2 + 3x - \sqrt[3]{5}$					
$I(x) = 23x$					
$J(x) = -4$					

III. Encierren con un círculo, los valores numéricos que son raíces en cada polinomio

a) $A(x) = -3x - 5$ $\quad -5\ ;\ \frac{3}{5}\ ;\ \frac{5}{3}\ ;\ -\frac{5}{3}$

b) $A(x) = x^2 - 4$ $\quad 4\ ;\ -2\ ;\ -4\ ;\ 2$

c) $A(x) = x^2 - 9$ $\quad -3\ ;\ 0\ ;\ 9\ ;\ 3$

d) $A(x) = x^2 + 25$ $\quad -5\ ;\ 5\ ;\ -25\ ;\ 25$

e) $A(x) = x^3 - 8$ $\quad -2\ ;\ 8\ ;\ -8\ ;\ 2$

IV. Dados los polinomios: $\mathrm{P(x)} = 8\mathrm{x}^3 - 5\mathrm{x}^2 + 2\mathrm{x} + 4$

$Q(x) = -6x^4 - x^3 - 7x^2 + 3x - 2$

$R(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{5}$

Resolver las siguientes operaciones

$P(x) + Q(x) + R(x) =$

$P(x) - Q(x) + R(x) =$

$Q(x) + R(x) =$

$P(x) + R(x) - Q(x) =$

$R(x) - P(x) =$

$R(x) - Q(x) + P(x) =$

1) Hallar el polinomio T(x) tal que sumado al $P(x) = 1 + 2x^3$ da como resultado $Q(x) = 5 - 3x + 2x^2 - 8x^3$.

2) Hallar A(x) tal que si se le resta $B(x) = ½ - 3x + 5x^2$ se obtiene $C(x) = 2 - 3x + 7x^2$.

V. *Resolver.*

1) Dados los polinomios: $P(x) = -3x^2 + x - 4$

$$Q(x) = \frac{2}{3}x - 2$$

$$R(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{5}$$

Calcular:

a) $P(x) . Q(x) =$

b) $Q(x) . R(x) =$

c) $P(x) . R(x) =$

d) $R(x) . Q(x) =$

e) $[R(x)]^2 =$

2) Dados los polinomios: $P(x) = x^3 - 2x + \frac{1}{2}$; $Q(x) = -\frac{1}{3}x + x^2$; $R(x) = 2x^2 + 1$ y

$$S(x) = -x^3 - x$$

Calcular las siguientes operaciones combinadas:

a) $P(x) - 2.[R(x) - S(x)] =$

b) $P(x).Q(x) - R(x).S(x) =$

c) $[P(x) + R(x)] - [S(x) - Q(x)] =$

d) $Q(x).R(x) + S(x) =$

e) $P(x).S(x) - R(x) =$

f) $P(x).R(x) + Q(x) =$

VI. Resolver aplicando la Regla de Ruffini:

a) $(x^2 + 8x + 12):(x + 6) =$

b) $(16x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 1):\left(x + \frac{1}{2}\right) =$

c) $\left(\frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{4}x^2 - 2x - 1\right):\left(x - \frac{1}{2}\right) =$

d) $(3x^4 - 6x^2 + 3):(x + 2) =$

e) $(4x^4 - 2x^2 + 5x - 7):(x - 1) =$

VII. Verificar el resto de las divisiones del ejercicio anterior utilizando el teorema del resto.

VIII. Hallar el resto de cada una de las siguientes divisiones:

a) $(x^3 - x^2 + 11x - 10):(x - 2) =$

b) $(8x^3 - 3x + x^4 + 20 + 12x^2):(x + 3) =$

c) $(x^4 - 2x^2 + 3):(x - 1) =$

d) $(x^4 - 6x):\left(x - \frac{1}{3}\right) =$

IX. Indicar cuáles de los siguientes polinomios son divisibles por (x + 1)

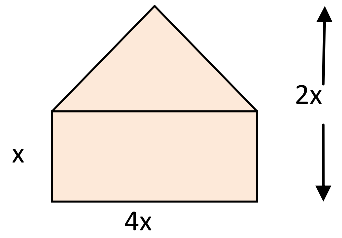
a) $P(x) = x^2 - 1$

b) $Q(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x$

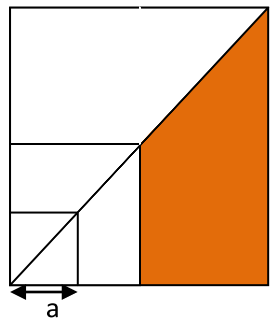
c) $R(x) = x^2 + x$

X. Utilizar una expresión algebraica irreducible para expresar el perímetro y el área de las figuras sombreadas.

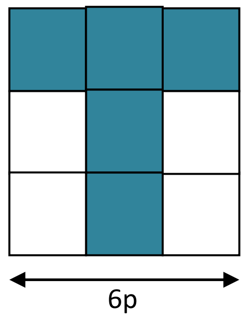
a)



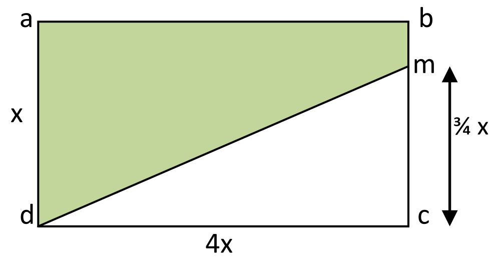
b)



c)



d)



XI. Desarrollar las expresiones hasta lograr la mínima expresión.

$a)\ -2a.\left(\frac{1}{2}a+a^5\right)$

$b)\ \left(\frac{1}{4}p^3-p\right)(8p+p^2)$

$c)\ -3x\left(x^3+\frac{1}{2}x^2\right)(x-2)$

$d)\ \frac{4}{9}x^2-\left(\frac{2}{3}x-3\right)\left(3+\frac{2}{3}x\right)=$

$e)\ \frac{3}{2}x(3-3x)-2\left(\frac{3}{2}x-\frac{9}{12}\right)^2=$

$f)\ \left(-\frac{1}{5}x^2-\frac{5}{2}\right)\left(\frac{5}{2}x^2-10x\right)=$

XII. Factorizar las siguientes expresiones:

1. a^2+a
2. $a^3b^2-2a^3b$
3. $a^4+a^3-a^2$
4. $18x^5+30x^4$
5. $48x^2-12x^3-24x^4$
6. $25b^2+35b^4-45b^5$
7. $11ax-121a^2x+33a^3$
8. $9a^5b-12a^2b^3+15ab^2-18a^3b^4$
9. $9x^2+6x+3$
10. $4x^4-8x^3+12x^2$
11. $6x^2-6xy-6x$
12. $14x^2y^2-28x^3+56x^4$
13. $34ax^2+51a^2y-68ay^2$

Clave de Respuestas

IV) 1)

a) $-6x^4+\frac{15}{2}x^3-\frac{51}{4}x^2+5x+\frac{11}{5}$ b) $6x^4+\frac{19}{2}x^3+\frac{5}{4}x^2-x+\frac{31}{5}$ c) $-6x^4-\frac{1}{2}x^3-\frac{31}{4}x^2+3x-\frac{9}{5}$

d) $6x^4+\frac{19}{2}x^3+\frac{5}{4}x^2-x+\frac{31}{5}$ e) $-\frac{15}{2}x^3+\frac{17}{4}x^2-2x-\frac{19}{5}$ f) $6x^4+\frac{19}{2}x^3+\frac{5}{4}x^2-x+\frac{31}{5}$

2) $T(x)=-10x^3+2x^2-3x+4$

3) $A(x)=12x^2-6x+\frac{5}{2}$

V)

1) a) $-2x^3+\frac{20}{3}x^2-\frac{14}{3}x+8$

b) $\frac{1}{3}x^4-x^3-\frac{2}{15}x+\frac{2}{5}$

c) $-\frac{3}{2}x^5+\frac{1}{2}x^4-2x^3+\frac{3}{5}x^2-\frac{1}{5}x+\frac{4}{5}$

d) $\frac{1}{3}x^4-x^3-\frac{2}{15}x+\frac{2}{5}$

e) $\frac{1}{4}x^6-\frac{1}{5}x^3+\frac{1}{25}$

2) a) $-x^3-4x^2-4x-\frac{3}{2}$ b) $3x^5-\frac{1}{3}x^4+x^3+\frac{7}{6}x^2+\frac{5}{6}$

c) $2x^3+\ 3x^2-\frac{4}{3}x+\frac{3}{2}$ d) $2x^4-\frac{5}{3}x^3+\ x^2-\frac{4}{3}x$

e) $-x^6+x^4-\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{2}x-1$ f) $2x^5-3x^3+2x^2-\frac{7}{3}x+\frac{1}{2}$

VI) 1)

$a)\ C(x)=x+2$
$R(x)=0$

$b)\ C(x)=16x^3-11x^2+\dfrac{15}{2}x-\dfrac{15}{4}$
$R(x)=\dfrac{7}{8}$

$c)\ C(x)=\dfrac{1}{2}x^2-2$
$R(x)=-2$

$d)\ C(x)=3x^3-6x^2+6x-12$
$R(x)=27$

$e)\ C(x)=4x^3+4x^2+2x+7$
$R(x)=0$

3) $a)\ R(x)=16$ $b)\ R(x)=2$ $c)\ R(x)=2$ $d)\ R(x)=-\dfrac{161}{81}$

4) $a)\ ,b)\ y\ c)$